ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου και A', B', Γ' τρία άλλα, αν υπάρχει ισομετρία φ ώστε:
$A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $\Gamma \mapsto \Gamma'$ τότε αυτή υποχρεωτικά είναι μοναδική

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν δυο ισομετρίες φ_1, φ_2 διαφορετικές
$\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = A'$, $\varphi_1(B) = \varphi_2(B) = B'$, $\varphi_1(\Gamma) = \varphi_2(\Gamma) = \Gamma'$, άρα
θα υπάρχει σημείο $P' = \varphi_1(P)$ και $\varphi_2(P) = P''$ με $P' \neq P''$
τα A, B, Γ είναι μη συνευθειακά και άρα τα A', B', Γ' είναι μη συνευθειακά ως εικόνες ισομετρίας μη συνευθειακών σημείων.
$|\vec{PA}| = |\vec{P'A'}| = |P''A'| \Rightarrow A'$ ανήκει στη μεσοκάθετο του $P'P''$
όπου ομοίως το B' ανήκει στη μεσοκάθετο του $P'P''$
καθώς επίσης το Γ' " " "
Άρα, A', B', Γ' συνευθειακά (↯) (αφού $P' \neq P''$)

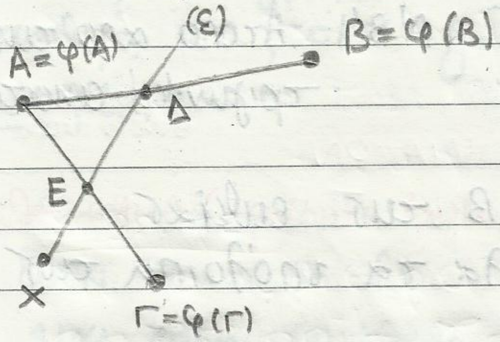
ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν μία ισομετρία διατηρεί τρία μη συνευθειακά σημεία τότε αυτή συμπίπτει με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό

Απόδειξη

Έστω φ ισομετρία: $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=B$, $\varphi(\Gamma)=\Gamma$

Θδο για τυχόν X: $\varphi(X)=X$



Αν ισομετρία διατηρεί σταθερά τα Α και Β ⇒ διατηρεί σταθερό το ευθ. τμήμα ΑΒ.
Για αυτό το λόγο σε περίπτωση που το Χ είναι πάνω στο ΑΒ ή είναι στο ΑΓ ⇒ $\varphi(X)=X$

Εξετάζω λοιπόν αν Χ δεν κείται στις ΑΒ και ΑΓ

α' τρόπος

ίδια απόδειξη με χρήση μεσοκαθέτου όπως πριν

β' τρόπος

Έστω Χ ανήκει στην (ε) που τέμνει ΑΒ στο Δ και ΑΓ στο Ε. Αφού, $\Delta \in (AB)$ και $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=B$ τότε $\varphi(AB)=AB$ τότε $\varphi(\Delta)=\Delta$ και όμοια $E\in(A\Gamma)$ και $\varphi(A)=A$, $\varphi(\Gamma)=\Gamma$ τότε $\varphi(A\Gamma)=A\Gamma$ τότε $\varphi(E)=E$. Άρα, ΕΔ αναλλοίωτο μέσω της φ ⇒
⇒ το τυχόν $\varphi(X)=X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1:

α) Η σύνθεση δύο ισομετριών είναι ισομετρία

β) Αν φ ισομετρία τότε και η φ^{-1} ισομετρία

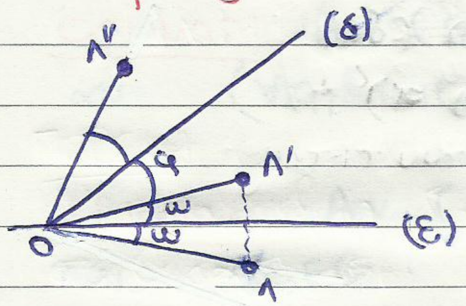
ΠΡΟΤΑΣΗ 2 / ΘΕΩΡΗΜΑ:

Κάθε ισομετρία στο επίπεδο μπορεί να γραφεί μπορεί να γραφεί ως σύνθεση τριών ανακλάσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ:

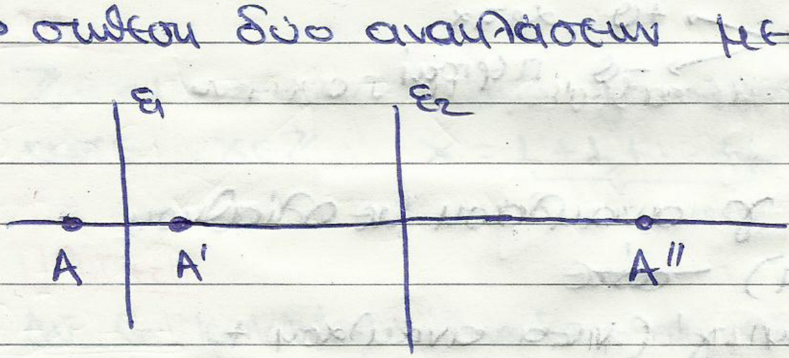
Μια Ισομετρία στο επίπεδο, λέγεται άρτια (ή περιττή) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους ανακλάσεων (ή περιττού πλήθους ανακλάσεων)

Παράδειγμα:



- σύνθεση 2 ανακλάσεων (στροφή ίδιου κέντρου + γωνία στροφής 2-πλάσιο των γωνιών)

- σύνθεση δύο ανακλάσεων με άξονες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ (μεταφορά)



- σύνθεση 3 ανακλάσεων:
  - ως προς παράλληλες → είναι μία ανάκλαση
  - ως προς μη-παράλληλες → είναι ανάκλαση + μεταφορά

Συνοπτικά:

Ισομετρίες { άρτιες (μεταφορές/στροφές)
περιττές (ανάκλαση/ανάκλαση + μεταφορά)

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ:

ΘΕΩΡ. #1:

Έστω P σημείο, (ε) μία ευθεία και α μία ισομετρία.
Τότε $\alpha \circ \sigma_{(\varepsilon)} \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(\varepsilon)}$, σ: ανάκλαση ως προς την (ε)

Π.Χ

Εστω $\alpha \equiv$ στροφή κατά γωνία 60°

Τα σημεία περιστρέφονται κατά γωνία "-60°" (60° με τη φορά των δεικτών) ⇒ έπειτα, γίνεται ανάκλαση ως προς την (ε) ⇒ Τέλος, γίνεται στροφή κατά 60°

Όλη αυτή η διαδικασία είναι ισοδύναμη με τη διαδικασία ανάκλασης ως προς την $a(\varepsilon)$ (δηλ. η εικόνα της (ε) μέσω της ισομετρίας α)

ΘΕΩΡ. #2 :

Αν α ισομετρία τότε:

$a \circ \tau_{\vec{AB}} \circ a^{-1} = \tau_{a(AB)}$ και όμοια

$a \circ R_{c,\theta} \circ a^{-1} = R_{a(c), \pm\theta}$ → $+\theta$, άρτια ; → $-\theta$, περιττή

ΘΕΩΡ. #3 :

Αν α ισομετρία και γ ανάκλαση με ολίσθηση (ανάκλαση + μεταφορά) τότε

$a \circ \gamma \circ a^{-1} = \gamma'$ όπου γ': νέα ανάκλαση + μεταφορά, άξονας ανάκλασης $a(\varepsilon)$

ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Το μαθηματικό αντικείμενο το οποίο περιγράφει όλες τις συμμετρίες ενός σχήματος, σχηματίζει ομάδα την οποία και ονομάζαμε ομάδα συμμετριών του σχήματος.

ΟΜΑΔΑ: Είναι ένα σύνολο G, εφοδιασμένο με μια πράξη * (κλειστή) (δηλ. $(G,*)$)

i) $\forall x,y \in G \Rightarrow x*y \in G$

ii) $\forall x,y,z \in G \Rightarrow x*(y*z) = (x*y)*z$

iii) $\exists e_G \in G: e*x = x \cdot e_G = x, \ \forall x \in G$

iv) $(\forall x \in G)(\exists z \in G): x \cdot z = e_G$

Πχ

$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ είναι ομάδες
όμοια και $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$
αλλά $(\mathbb{Z},\cdot)$ όχι ομάδα αφού το $\frac{1}{x}$ όχι πανοτε στο $\mathbb{Z}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(G,*)$ ομάδα τότε λέμε G αβελιανή αν $(\forall a,b \in G): ab = ba$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(G,*)$ ομάδα τότε λέμε G κυκλική αν $\exists a \in G : G = \langle a \rangle$ δηλ. $(\forall x \in G)(\exists k \in \mathbb{Z}): x = a^k$

$\langle a \rangle$ → γεννήτορας

$a^k = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{k\text{-φορές}}$

Πχ

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ δύο γεννήτορες ως προς την πρόσθεση
ώστε $x \in \mathbb{Z}$: $x = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{x \text{ φορές}} = x \cdot 1 \; (= 1^x \text{ συμβολισμός})$

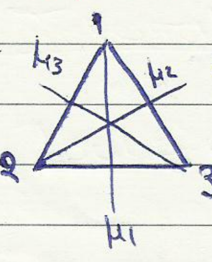
ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν G κυκλική ομάδα $\Longrightarrow$ G αβελιανή ομάδα

Απόδειξη

$x * y = a^m * a^n = a^n * a^m = y * x$

ομάδες συμμετριών:



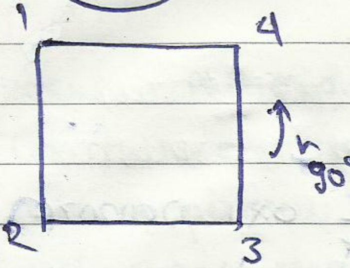
$r_{120°}$

$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Έτσι, φτιάξαμε την ομάδα $D_3 = \{Id, r, r^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

P_4



$r = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $r^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$r^3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $r^4 = Id$

$\mu_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\mu_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\mu_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$\mu_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. όλες οι συμμετρίες του τετραγ.

$P_4 = \{Id, r, r^2, r^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$.

Θυμίζουμε:

$(S_n, \cdot)$: όλες οι δυνατές μεταθέσεις n-στοιχείων του συνόλου $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Δηλ. $S_n = \{ f : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1, 2, \dots, n\} \}$

συμβολισμός

$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\end{pmatrix} \longrightarrow$ μία μετάθεση των $1, \dots, n$

Έτσι, για παράδειγμα η S_3 έχει πλήθος $|S_3| = 3! = 6$

άρα γενικά στη S_ν έχουμε $|S_\nu| = \nu!$

(δηλ όλες οι δυνατές μεταθέσεις)

Παρατήρηση:

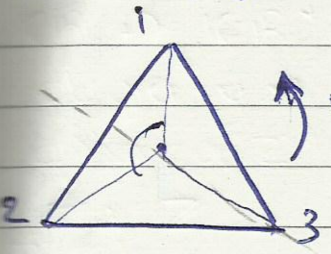
για $n=3$ (Μόνο!) $S_3 = P_3$

Γενικά, $|P_n| = 2 \cdot n$

άρα $|P_4| = 2 \cdot 4 = 8$ αλλά $|\Sigma_4| = 4! = 24$

Λόγω λειτουργικού προβλήματος θα πρέπει να δουλεύουμε με αναπαραστάσεις και στροφές ώστε να περιγράφουμε την ομάδα συμμετριών

Στο τρίγωνο:



$r: \frac{2\pi}{3} = 120°$

s: ανάκλαση = στροφή κατά π.

Έτσι, έχουμε τρεις στροφές $r, r^2, r^3 = e$ (ή Id)

καθώς, $\underset{\mu_3}{\overset{\parallel}{s}}, \underset{\mu_2}{\overset{\parallel}{rs}}, \underset{\mu_1}{\overset{\parallel}{r^2 s}}$

Τουτέστιν, $D_3 = \{r, r^2, r^3 = e, s, rs, r^2 s\} = \{e, r, r^2, s, rs, r^2 s\}$

ώστε να αποτελεί μια ομάδα

Γενικά τώρα στην D_n r κατά $\frac{2\pi}{n}$ και s είναι ο άξονας συμμετρίας.

Αποδεικνύεται ότι $sr = r^{n-1} s$ και $s^2 = Id$, $r^n = Id$

και έτσι ορίσαμε την

$D_n = \{Id, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \ldots, r^{n-1} s\}$